A. Repaso de las matrices

Sin entrar en definiciones teóricas que se salen del tema que tratamos en este libro, consideramos que una matriz se presenta en forma de tabla rectangular de **n** líneas y de **m** columnas que contienen números reales. Cada elemento de la matriz se puede designar por su índice de línea y su índice de columna:

a_{ij} representa el número situado en la intersección de la línea i y de la columna j.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Una matriz con el mismo número de líneas y de columnas es una **matriz cuadrada**.

Suma de matrices: las matrices con las mismas dimensiones pueden sumarse. Si A y A' son dos matrices de dimensiones **n x m**; el elemento genérico de la matriz C = A + A' se calcula mediante:

$c_{ij} = a_{ij} + a'_{ij}$

Multiplicación por un escalar k: el resultado es una matriz de la misma dimensión cuyo elemento genérico es:

$c_{ij} = k.a_{ij}$

Multiplicación de dos matrices: la multiplicación de una matriz A (**n** líneas x **m** columnas) por una matriz B (**m** líneas x **p** columnas) es una matriz C de **n** líneas x **p** columnas cuyo elemento genérico es:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}.b_{kj}$$

Matriz identidad (I): matriz cuyos elementos valen todos 0 excepto los elementos de la diagonal que son igual a 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz transpuesta: la matriz transpuesta M de elemento genérico a_{ij} es la matriz $M'={}^tM$ de elemento genérico a_{ji}.

Matriz invertible: la inversa de una matriz cuadrada A es una matriz $B = A^{-1}$ tal que A.B = B.A = I (matriz identidad).

Matriz diagonal: matriz cuyos elementos valen todos 0 excepto los de la diagonal.

Matriz ortogonal: una matriz M se llama ortogonal si cumple la relación ${}^tM.M = M.{}^tM = I$.

Matriz simétrica: es una matriz igual a su transpuesta, es decir $M = {}^tM$.

Determinante: el determinante de una matriz cuadrada es un número que tiene distintas aplicaciones matriciales. Este permite, por ejemplo, determinar si una matriz es invertible o no.

Se puede calcular por recurrencia limitándose, por último, al cálculo del determinante de una matriz 2 x 2.

El determinante de la matriz siguiente:

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ se escribe $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ y toma el valor **a.d - b.c**

<u>Ejemplo: es decir, la matriz cuadrada M (3 x 3) siguiente.</u>

$M = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$. El determinante de M se calcula mediante la fórmula:

$Det(M) = 5.\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + (-1).3.\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 4.\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ y cuyo desarrollo es:

DET(M) = 5 x (6 x 2 - 5 x 2) - 3 x (4 x 2 - 5 x 1) + 4 x (4 x 2 - 6 x 1) = 9

B. Tratamiento de las matrices con Excel

1. Designación de matrices

La forma más simple de designar una matriz es el área rectangular de celdas localizada por su dirección o por su nombre. En el ejemplo siguiente, el rango A3:D6 (llamado M) representa una matriz.

	A	B	C	D
3	3	7	-2	3
4	6	3	-1	-4
5	4	2	8	6
6	1	3	-2	2

Una matriz también se puede designar en forma de **constante matricial**. La expresión {2.3;4.7;2.9} designa la matriz de 3 líneas x 2 columnas siguiente:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Una constante matricial se puede utilizar con esta forma en una fórmula en la que entran en juego varias matrices (suma, multiplicación, etc.). También puede usarse en forma de escritura "matricial" (véase el capítulo Consejos de buenas prácticas - Las fórmulas matriciales) para completar un rango de celdas. En el ejemplo, el rango D11:E13 se ha completado en el orden siguiente:

- la selección del rango D11:E13
- la escritura de la fórmula ={2.3;4.7;2.9}
- la validación en forma matricial mediante la combinación de teclas .

D11

	D	E
11	2	3
12	4	7
13	2	9

Para extraer una submatriz de una matriz de base, hay que emplear la función DESREF cuya sintaxis general permite designar cualquier área rectangular de celdas contiguas dentro de esta matriz de base

=DESREF (matriz de referencia;desplazamiento de líneas;desplazamiento de columnas;[número de líneas];[número de columnas])

Los dos últimos argumentos son facultativos. Si se ignoran, la submatriz se desplazará hasta el límite inferior y derecho de la matriz de base. A continuación mostramos dos ejemplos de designación de submatrices a partir de la matriz de base M. La parte en gris representa la submatriz que vamos a designar.

Ejemplo 1:

3	7	-2	3
6	3	-1	-4
4	2	8	6
1	3	-2	2

Fórmula matricial: {=DESREF(M;1;2)}

Es decir, un desplazamiento de 1 línea hacia abajo y de 2 columnas hacia la derecha.

Ejemplo 2:

3	7	-2	3
6	3	-1	-4
4	2	8	6
1	3	-2	2

Fórmula matricial: {=DESREF(M;1;1;2;2)}

La designación del rango en gris se obtiene por desplazamiento de 1 línea hacia abajo, de 1 columna hacia la derecha sobre una altura de 2 líneas y una anchura de 2 columnas.

2. Las funciones de matrices

La suma, la resta y la multiplicación por un escalar no suponen ninguna dificultad ya que basta con aplicar los operadores aritméticos habituales y escribir la fórmula en forma matricial.

Por ejemplo, la multiplicación de la matriz M por un escalar (10) se obtiene simplemente mediante la fórmula matricial: {=10*M} escrita en un rango de la misma dimensión que M.

M

3	7	-2	3
6	3	-1	-4
4	2	8	6
1	3	-2	2

⟹

{=10*M}

30	70	-20	30
60	30	-10	-40
40	20	80	60
10	30	-20	20

La función MMULT realiza el producto matricial de 2 matrices A(n,m) y B(m,p). Recordemos que **el número de columnas de A** debe ser igual al **número de líneas de B**. El resultado es una matriz que tiene el **número de líneas de A** y el **número de columnas de B**.

La sintaxis, obligatoriamente matricial, es: {=MMULT(A;B)}

La función se escribe en un rango de celdas de n líneas y p columnas.

Ejemplo:

La multiplicación matricial de A (3 l. x 4 c.) por B (4 l. x 2 c.) da una matriz con 3 líneas y 2 columnas.

A

3	7	-2	3
6	3	-1	-4
4	2	8	6

x

B

2	3
-5	3
2	-2
-4	1

=

{=MMULT(A;B)}

-45	37
11	25
-10	8

La función MINVERSA calcula la matriz inversa de una **matriz cuadrada** M. La sintaxis es: {MINVERSA(M)}.

> *Una matriz solo puede invertirse si su determinante es distinto de 0. La función no matricial MDETERM(M) permite el cálculo del determinante. En el ejemplo, el determinante de M calculado mediante =MDETERM(M) tiene como valor -442.*

M

3	7	-2	3
6	3	-1	-4
4	2	8	6
1	3	-2	2

{=MINVERSA(M)}

- 0,412	0,190	0,097	0,706
0,529	- 0,090	- 0,070	- 0,765
0,294	- 0,059	0,029	- 0,647
- 0,294	- 0,018	0,086	0,647

Llamemos MI a la matriz inversa de M que acabamos de calcular y verifiquemos que MMULT(M;MI) o MMULT(MI;M) da como resultado una matriz identidad.

M

3	7	-2	3
6	3	-1	-4
4	2	8	6
1	3	-2	2

MI

- 0,412	0,190	0,097	0,706
0,529	- 0,090	- 0,070	- 0,765
0,294	- 0,059	0,029	- 0,647
- 0,294	- 0,018	0,086	0,647

{=MMULT(M;MI)}

1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

C. Aplicación en el álgebra lineal

1. Resolución de un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas

La forma general de un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas es:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{-------------------------------------} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

En forma matricial, el sistema se escribe: A.X = B, es decir:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_i \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_i \\ b_n \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la solución se obtiene mediante la fórmula $X = A^{-1}.B$, siempre y cuando la matriz **A** sea invertible.